Cours du 15.03.2021 MATIN

lundi, 15 mars 2021 10:13

Récap :

Système orthonormé :

- ☐ N vecteurs à N dimensions $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ $i, j = 1, \dots, N$
- ☐ Orthogonaux : à angle droit, $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ $i \neq j$
- ☐ Longueur 1 $\|\vec{x}_i\| = 1$

Base génératrice de $\mathbb{R}^N$ => contient au moins une famille libre de N vecteurs, pas nécessairement orthogonaux ni de longueur 1.

Famille libre : aucun membre de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des N-1 autres vecteurs.
C'est le cas si la SEULE solution de l'équation suivante est

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_N \vec{x}_N = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0 \;!$$

Si un des $\vec{x}_i = \vec{0}$ alors $\lambda_i = 0$ ou $\lambda_j = 1623$ donnera

$$0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots 1623 \vec{x}_i + \vec{0} \vec{x}_{i+1} + \dots = \vec{0}$$

les λ ne sont PAS tous 0 !

Une famille LIBRE ne contient JAMAIS le vecteur $\vec{0}$!

Exemple : $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ est-il une Famille Libre ?

CONNU

Déf de Fam. Libre

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3}_{\text{VARIABLES}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \vec{x}_2 + 100 \cdot \vec{x}_3 = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$0\cdot\vec{x}_1 + 0\,\vec{x}_2 + \underbrace{100}_{\lambda_3 \neq 0}\cdot\vec{x}_3 = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Donc, le triplet $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 100$ est une sol. NON NULLE

de $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 = \vec{0}$ $\Rightarrow$ ce n'est PAS une fam. Libre !

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \ !$$

λ_3 indéterminé !

Exercices : les familles de vecteurs suivants sont-elles LIBRES

1) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ FAM LIBRE

2) $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ PAS FAM. LIBRE

2) Par intuition on observe que $\vec{y}_3 = \underbrace{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}$

Posons $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = -1$

$$\underset{\shortparallel}{\lambda_1}\vec{y}_1 + \underset{\shortparallel}{\lambda_2}\vec{y}_2 + \underset{\shortparallel}{\lambda_3}\vec{y}_3 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_3 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 - (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{0}$$

$$\underbrace{1 \qquad 1 \qquad -1}_{\neq\, 0,0,0} \Rightarrow \underline{\text{PAS}} \text{ fam. libre !}$$

1) $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 = \vec{0}$ (Quand est-ce VRAI ?) $\lambda_2 \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \cdot 1 \\ \lambda_2 \cdot 2 \\ \lambda_2 \cdot 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 \\ 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 \\ 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \xRightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 + \lambda_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \cancel{\lambda_2} + \cancel{\lambda_3} = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Si $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 = \vec{0}$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ c'est une FAM. LIBRE

2) $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

⚠ $\ell_1 = \ell_3$

$$\lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \lambda_3 \vec{y}_3 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 = 0 \\ 1\cdot\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 1\cdot\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Système sous-déterminé

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{\text{2 éq. 3 inc.}}$

$\Rightarrow \infty$-té de sol !

Fixons $\lambda_1 = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ 3 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -3 - 2\lambda_3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3$ $\qquad$ $\lambda_1 = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -3 - 2\lambda_3 \\ 3 + 2[-3 - 2\lambda_3] + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -3 - 2\lambda_3 \\ -3 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -3 - 2(-3) = 3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

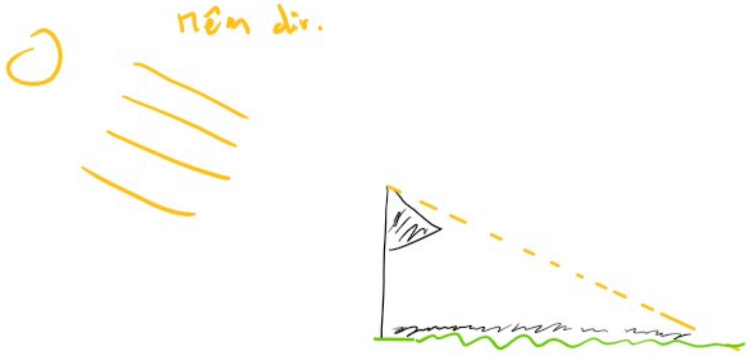
$$\left(\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases} \right)$$

Vérifions $\quad \overset{\lambda_1}{3}\,\vec{y}_1 + \overset{\lambda_2}{3}\,\vec{y}_2 + \overset{\lambda_3}{(-3)}\,\vec{y}_3 = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+3-6\\3+6-9\\3+3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

On a une solution $\Rightarrow$ PAS fam. libre !

où $3\vec{y}_1 + 3\cdot\vec{y}_2 + (-3)\vec{y}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

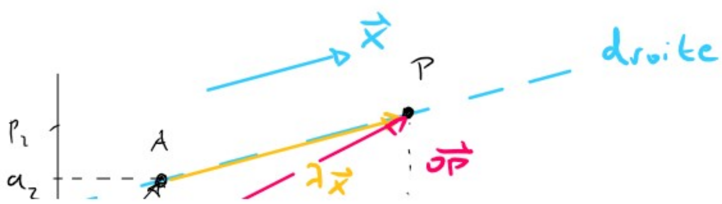
où $3 \neq 0$, $3 \neq 0$ et $(-3) \neq 0$

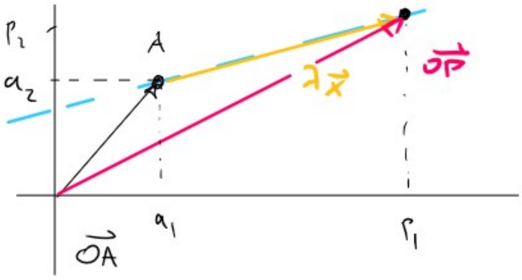


Définition d'une DROITE (2D):

Pour définir une droite en 2D il nous faut

- 2 points
- Une direction et point





Tout point sur la droite s'écrit comme

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{x}$$

$\vec{x}$ Est appelé le "vecteur directeur" qui engendre la droite.

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ connu

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ connu

$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ indéterminé

$\lambda \in \mathbb{R}$ indéterminé

On peut donc transformer l'équation "vectorielle" ci-dessus en système d'équations

$$\boxed{\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ce sont les ***équations paramétriques*** de la droite d.
Le ***paramètre*** est $\lambda \in \mathbb{R}$.

N'importe quel point sur la droite d vérifie les équations paramétriques pour un certain λ.

Autrement dit, si un point $\vec{p}$ est sur la droite d, alors il existe un λ tel que les équations paramétriques soient vérifiées.

Dans le monde des "fonctions" vous avez sûrement vu qu'une droite s'écrit de la forme

$$y = ax + b \qquad b \text{ ordonée à l'origine}$$

$y = ax + b$ b ordonée à l'origine

a pente

On peut retrouver une seule équation à partir des équations paramétriques !!!

$$\begin{cases} P_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ P_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{P_1 - a_1}{x_1} & ⚠ x_1 \neq 0 \,! \\ \lambda = \dfrac{P_2 - a_2}{x_2} & ⚠ x_2 \neq 0 \,! \end{cases}$$

Transformons ce système en une seule équation, en isolant le paramètre λ.

Comme $\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow \dfrac{P_1 - a_1}{x_1} - \dfrac{P_2 - a_2}{x_2} = 0$

Multiplions le toute par $[x_1 \cdot x_2]$

$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ sur la droite

Rappel $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ connu

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ connu

$$x_2 P_1 - x_1 \cdot P_2 - a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0$$

$$P_1 x_2 - P_2 x_1 + \underbrace{(a_2 x_1 - a_1 x_2)}_{\text{Constante !}} = 0$$

$$\Rightarrow P_2 = \underbrace{\frac{x_2}{x_1}}_{\text{const}} P_1 + \overbrace{\frac{a_2 x_1 - a_1 x_2}{x_1}}^{\text{const}}$$

$Y = a\,x + b$

L'équation ci-dessus s'appelle l'***équation cartésienne*** de la droite d.

TOUT point sur la droite d vérifie l'équation cartésienne. Autrement dit, pour vérifier si un point est sur une droite ou non, il suffit de vérifier si son équation cartésienne vaut 0 ! Si oui, le point est sur la droite, si NON, il n'est PAS sur droite !